УДК 519.652:519.254

П.О. Приставка, О.Г. Чолишкіна

Національний авіаційний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ *B*-СПЛАЙНА ШОСТОГО ПОРЯДКУ ТА ЇХ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ

Отримано властивості *B*-сплайна шостого порядку, визначеного на рівномірному розбитті. Досліджено властивості поліноміального сплайна на основі *B*-сплайнів шостого порядку, що є близьким до інтерполяційного у середньому.

Ключові слова: *B-сплайн, поліноміальний сплайн, близький до інтерполяційного у середньому, норма сплайну.*

Получены свойства *B*-сплайна шестого порядка, определённого на равномерном разбиении. Исследовано свойства полиномиального сплайна на основе *B*-сплайнов шестого порядка, близкого к интерполяционному в среднем.

Ключевые слова: *B-сплайн, полиномиальный сплайн, близкий к інтерполяционному в средном, норма сплайна.*

This article is the solution of practical research of the *B*-spline of six order. We obtain and research properties of polynomial spline based on the *B*-splines of six order that, related to the interpolar on average.

Keywords: *B-spline, polynomial spline that, related to interpolar on average, norm of spline.*

Постановка проблеми. Зазвичай при фіксації аналогового сигналу має місце таке. Нехай $\phi(t)$ – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал $p(t)$. У силу суто технічних властивостей систем реєстрації результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації, зокрема

$$(p*\phi)(ih)=\frac{1}{h}\int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}}p(t)\phi(t-ih)dt=\overline{p_i}.$$

Тоді цифровий сигнал може мати таке подання:

$$p_i = \overline{p}_i + \varepsilon_i ,\ i \in \mathbb{Z} , \qquad (1)$$

де ε_i – випадкова вада. Стосовно вади ε_i, $i \in \mathbb{Z}$ можна припускати будь-який розподіл, проте за замовченням вважають, що має місце розподіл Гауса з нульовим математичним сподіванням та деякою дисперсією σ_ε^2. Тому в задачах обробки цифрових сигналів, що задані співвідношенням (1), як модель $p(t)$ є потреба використовувати наближення із властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтра, наприклад лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому [1].

Відомо [2; 3], що будь-який *B*-сплайн порядку вище першого може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур’є; при цьому вже починаючи з п’ятого порядку *B*-сплайн у частотній області фактично мало чим відрізняється від гаусіана, хоча обрахунок *B*-сплайна п’ятого порядку [4] потребує менше обчислювальних витрат. Саме тому актуальним є дослідження лінійних комбінацій *B*-сплайнів вищого порядку, ніж п’ятий: від подібних сплайнів варто очікувати більш високі згладжувальні властивості при відносно низькій обчислювальній складності.

Аналіз досліджень та постановка задачі. Задачу відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів висвітлено в роботах І. Шоенберга, К. Де Бора, М.П. Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О.Лигуном, О.А.Шумейко, В.В.Кармазіною [5 – 7] та у авторських дослідженнях [8].

Нехай із кроком $h > 0$ задане розбиття дійсної осі $\Delta_h : t_i = ih$, $i \in Z$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t) \in C^r$, $r \geq 2$, визначеної на $\mathbb{R}_1(-\infty; \infty)$. Вважають, що інформація про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задана у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла $\overline{p}_i = \frac{1}{h} \int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)dt$; при цьому істинне значення функції $p(t)$ у вузлах визначається аналогічно виразу (1).

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h вводяться такі поліноміальні сплайни на основі B-сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому:

$$S_{r,0}\left(p,t\right)=\sum_{i\in Z} p_i B_{r,h}\left(t-\left(i+0,5\right)h\right),\ r=2,4\,,$$

$$S_{r,0}\left(p,t\right)=\sum_{i\in Z} p_i B_{r,h}\left(t-ih\right),\ r=3,5\,,$$

де B-сплайн $B_{r,h}(t)$ порядку r ($r\geq 1$) визначається рекурентно таким чином: якщо

$$B_{0,h}\left(t\right)=\begin{cases}0, & t\notin\left[-h/2;h/2\right],\\ 1, & t\in\left[-h/2;h/2\right],\end{cases}$$

то

$$B_{r,h}\left(t\right)=\frac{1}{h}\int\limits_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}\left(\tau\right)d\tau\,. \qquad (2)$$

Наприклад, B-сплайн п’ятого порядку є такий:

$$B_{5,h}(t)=\begin{cases}0, & t\notin\left[-3h;3h\right],\\ \frac{1}{120}\left(3+\frac{t}{h}\right)^5, & t\in\left[-3h;-2h\right],\\ -\frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5-\frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3-\frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2-\frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right)+\frac{51}{120}, & t\in\left[-2h;-h\right],\\ \frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5+\frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{11}{20}, & t\in\left[-h;0\right],\\ -\frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5+\frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{11}{20}, & t\in\left[0;h\right],\\ \frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5-\frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4+\frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3-\frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right)+\frac{51}{120}, & t\in\left[h;2h\right],\\ \frac{1}{120}\left(3-\frac{t}{h}\right)^5, & t\in\left[2h;3h\right].\end{cases} \qquad (3)$$

Про похибку відтворення функції $p(t)$ за використанням сплайнів $S_{r,0}(p,t)$, $r = 2,3,4,5$ свідчать твердження [4–8]: при $h \to 0$ для довільної функції $p(t) \in C^2$ виконується

$$\left\| p(t) - S_{r,0}(p,t) \right\| \le \frac{(r+2)h^2}{24} \left\| p'' \right\| + \varepsilon \left\| p \right\| + \mathrm{o}\left(h^2\right). \qquad (4)$$

Поставимо за мету даної роботи отримати подання B-сплайна шостого порядку та дослідити відповідний поліноміальний сплайн, що є лінійною комбінацією зазначених B-сплайнів.

Виклад основного матеріалу. На підставі виразів (2), (3) неважко отримати такий вираз для B-сплайна шостого порядку (рис.1):

$$B_{6,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin \left[-\frac{7h}{2}, \frac{7h}{2}\right], \\ \frac{1}{720}\left(\frac{t}{h}+\frac{7}{2}\right)^6, & t \in \left[-\frac{7h}{2}, -\frac{5h}{2}\right], \\ -\frac{1}{120}\left(\frac{t}{h}\right)^6 - \frac{7}{60}\left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{21}{32}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{133}{72}\left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{329}{128}\left(\frac{t}{h}\right)^2 - \frac{1267}{960}\left(\frac{t}{h}\right) + \frac{1379}{7680}, & t \in \left[-\frac{5h}{2}, -\frac{3h}{2}\right], \\ \frac{1}{48}\left(\frac{t}{h}\right)^6 + \frac{7}{48}\left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{21}{64}\left(\frac{t}{h}\right)^4 + \frac{35}{288}\left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{91}{256}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{7}{768}\left(\frac{t}{h}\right) + \frac{7861}{15360}, & t \in \left[-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}\right], \\ -\frac{1}{36}\left(\frac{t}{h}\right)^6 + \frac{7}{48}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{77}{192}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{5887}{11520}, & t \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right], \\ \frac{1}{48}\left(\frac{t}{h}\right)^6 - \frac{7}{48}\left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{21}{64}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{35}{288}\left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{91}{256}\left(\frac{t}{h}\right)^2 - \frac{7}{768}\left(\frac{t}{h}\right) + \frac{7861}{15360}, & t \in \left[\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right], \\ -\frac{1}{120}\left(\frac{t}{h}\right)^6 + \frac{7}{60}\left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{21}{32}\left(\frac{t}{h}\right)^4 + \frac{133}{72}\left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{329}{128}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{1267}{960}\left(\frac{t}{h}\right) + \frac{1379}{7680}, & t \in \left[\frac{3h}{2}, \frac{5h}{2}\right], \\ \frac{1}{720}\left(\frac{t}{h}-\frac{7}{2}\right)^6, & t \in \left[\frac{5h}{2}, \frac{7h}{2}\right]. \end{cases} \qquad (5)$$

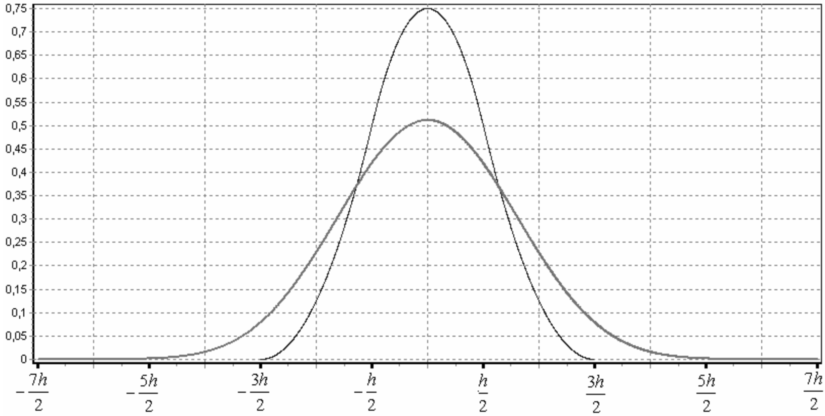

Рис.1. *B*-сплайни: порядку $r=2$ (тонка лінія); порядку $r=6$ (товста лінія)

На графіку (рис.2), порівняно з гаусіаном, продемонстровано властивості *B*-сплайна шостого порядку в частотній області.

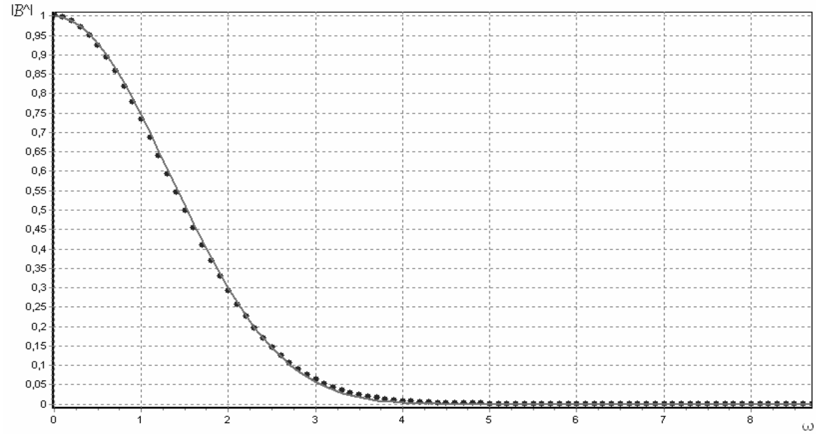

Рис.2. Частотна область: *B*-сплайн шостого порядку (суцільна лінія); гаусіан (крапки) з $\sigma = 0,782$

Із виразу (5) зрозуміло, що сплайн $B_{6,h}(t)$ є симетричною функцією відносно носія $d_6 = [-7h/2; 7h/2]$ із такими властивостями:

$$B_{6,h}(0)=\frac{5887}{11520}, \qquad B_{6,h}\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{151}{360}, \qquad B_{6,h}(\pm h)=\frac{10543}{46080},$$

$$B_{6,h}\left(\pm\frac{3h}{2}\right)=\frac{19}{240}, \qquad B_{6,h}(\pm 2h)=\frac{361}{23040}, \qquad B_{6,h}\left(\pm\frac{5h}{2}\right)=\frac{1}{720},$$

$$B_{6,h}(\pm 3h)=\frac{1}{46080}, \qquad B_{6,h}\left(\pm\frac{kh}{2}\right)=0, \; k>6,$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{151}{315}, \qquad \frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 1-1/2)h}^{(\pm 1+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{397}{1680},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 2-1/2)h}^{(\pm 2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{1}{42}, \qquad \frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 3-1/2)h}^{(\pm 3+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{1}{5040},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm k-1/2)h}^{(\pm k+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=0, \; k>3,$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 1/2-1/2)h}^{(\pm 1/2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{259723}{645120}, \quad \frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 3/2-1/2)h}^{(\pm 3/2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{20219}{215040},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 5/2-1/2)h}^{(\pm 5/2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{2179}{645120}, \quad \frac{1}{h}\int\limits_{(\pm 7/2-1/2)h}^{(\pm 7/2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=\frac{1}{645120},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{(\pm k/2-1/2)h}^{(\pm k/2+1/2)h} B_{6,h}(t)\,dt=0, \quad k>7.$$

За аналогією зі сплайнами $B_{r,h}(t)$, $r=2,3,4,5$ можна стверджувати, що якщо $S_r(\Delta_h)$ – множина всіх сплайнів мінімального дефекту за розбиттям Δ_h і $B_{6,h}(t)\in S_6(\Delta_h)$, то лінійна комбінація сплайнів $B_{6,h}(t)$ також буде належати множині сплайнів мінімального дефекту $S_6(\Delta_h)$.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h введемо таку лінійну комбінацію *B*-сплайнів (5):

$$S_{6,0}(p,t)=\sum_{i\in Z} p_i B_{6,h}\left(t-(i+0{,}5)h\right). \qquad (6)$$

Подамо сплайн $S_{6,0}(p,t)$ у зручному для реалізації в обчислювальному середовищі вигляді. Якщо ввести заміну $x=2\left(t-(i+0{,}5)h\right)/h$, $|x|\le 1$, то вираз (6) можна записати так:

$$\begin{aligned}S_{6,0}(p,t)=\frac{1}{46080}\Big((1-x)^6 p_{i-3}+\\ +\left(722-1416x+1110x^2-400x^3+30x^4+24x^5-6x^6\right)p_{i-2}+\\ +\left(10543-8670x+1185x^2+860x^3-255x^4-30x^5+15x^6\right)p_{i-1}+\\ +\left(23548-4620x^2+420x^4-20x^6\right)p_i+\\ +\left(10543+8670x+1185x^2-860x^3-255x^4+30x^5+15x^6\right)p_{i+1}+\\ +\left(722+1416x+1110x^2+400x^3+30x^4-24x^5-6x^6\right)p_{i+2}+(1+x)^6 p_{i+3}\Big).\end{aligned} \qquad (7)$$

Нехай у вузлах розбиття Δ_h для значень деякої гладкої неперервної функції $p(t)$ виконується умова (1). Тоді для сплайна (6) має місце рівність

$$S_{6,0}(p,t)=S_{6,0}(\overline{p},t)+S_{6,0}(\varepsilon,t).$$

Оцінка якості відтворення функції $p(t)$ зводиться до оцінки відхилення

$$\left|p(t)-S_{6,0}(p,t)\right|=\left|p(t)-S_{6,0}(\overline{p},t)-S_{6,0}(\varepsilon,t)\right|$$

або для $|\varepsilon_i|<\varepsilon$, $i\in Z$, до оцінки нерівності

$$\left|p(t)-S_{6,0}(p,t)\right|\le\left|p(t)-S_{6,0}(\overline{p},t)\right|+\varepsilon\left\|S_{6,0}\right\|, \qquad (8)$$

де $\left\|S_{6,0}\right\|=\sup\limits_{|\varepsilon_i|}\max\limits_{t}\left|S_{6,0}(\varepsilon,t)\right|$ – норма сплайн-оператора $S_{6,0}(p,t)$.

Подальша задача оцінки якості відтворення $p(t)$ складається із двох етапів: знаходження норми сплайн-оператора $S_{6,0}(p,t)$ і задача визначення похибки відтворення.

З урахуванням розкладу $S_{6,0}\left(\overline{p},t\right)$ та $p\left(t\right)\in C^6$ у ряд Тейлора в околі точки $\left(\left(i-0,5\right)h\right)$ нескладно стверджувати, що для $\forall p\left(t\right)\in C^2$ при $h\to 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$p(t)-S_{6,0}\left(\overline{p},t\right)=-\frac{1}{3}p''(t)h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Отже, при $h\to 0$ для довільної функції $p\left(t\right)\in C^2$ виконується

$$\left\|p\left(t\right)-S_{5,0}\left(\overline{p},t\right)\right\|=\frac{7h^2}{24}\left\|p''\right\|+\mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Проведемо оцінку норми сплайна (6).

Теорема 1. Для сплайна $S_{6,0}\left(p,t\right)$ є вірним

$$\left\|S_{6,0}\right\|=\left\|p\right\|.$$

Доведення. Із представлення сплайна $S_{6,0}\left(p,t\right)$ у вигляді (7) випливає, що

$$\left\|S_{6,0}\right\|\le\frac{1}{46080}\left\|p\right\|\max_{|x|\le 1}A\left(x\right),$$

де

$$A\left(x\right)=\left|\left(1-x\right)^6\right|+\left|722-1416x+1110x^2-400x^3+30x^4+24x^5-6x^6\right|+$$
$$+\left|10543-8670x+1185x^2+860x^3-255x^4-30x^5+15x^6\right|+$$
$$+\left|23548-4620x^2+420x^4-20x^6\right|+$$
$$+\left|10543+8670x+1185x^2-860x^3-255x^4+30x^5+15x^6\right|+$$
$$+\left|722+1416x+1110x^2+400x^3+30x^4-24x^5-6x^6\right|+\left|\left(1+x\right)^6\right|.$$

Ураховуючи, що функція $A\left(x\right)$ є парною, для знаходження її максимуму достатньо розглянути її для $x\in\left[0;1\right]$. Для цих x, зважаючи, що вирази під знаком модуля більші за нуль, маємо

$$\max_{x\in[0;1]}A\left(x\right)=46080.$$

Таким чином,

$$\left\| S_{6,0} \right\| \le \left\| p \right\|. \tag{9}$$

З іншого боку, для будь-якого частинного випадку

$$\left\| S_{6,0}\left(p,t\right) \right\| \ge \left\| S_{6,0}\left(p^*,t\right) \right\|.$$

Тоді для $x = 0$ маємо

$$S_{6,0}\left(p,t\right) = \frac{1}{46080}\Big(p_{i-3}^* + 722 p_{i-2}^* + 10543 p_{i-1}^* +$$
$$+23548 p_i^* + 10543 p_{i+1}^* + 722 p_{i+2}^* + p_{i+3}^*\Big).$$

Якщо

$$p_{i-3}^* = p_{i-2}^* = p_{i-1}^* = p_i^* = p_{i+1}^* = p_{i+2}^* = p_{i+3}^* = \left\| p \right\|,$$

то

$$\left\| S_{6,0} \right\| \ge \left\| S_{6,0}\left(p^*,t\right) \right\| \ge \left| S_{6,0}\left(p^*,0\right) \right| = \left\| p \right\|,$$

а отже, з урахуванням (9), приходимо до висновку, що

$$\left\| S_{6,0} \right\| = \left\| p \right\|.$$

Теорему доведено.

Наслідок 2. Для $\forall p\left(t\right) \in C^2$ має місце

$$\left\| p\left(t,q\right) - S_{6,0}\left(p,t\right) \right\| \le \frac{h^2}{3}\left\| p'' \right\| + \varepsilon \left\| p \right\| + \mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Висновки. У роботі отримано подання та властивості *B*-сплайна шостого порядку, визначеного на рівномірній сітці вузлів. Отримано явний вигляд та проведено дослідження поліноміального сплайна, близького до інтерполяційних у середньому, що є лінійною комбінацією *B*-сплайнів шостого порядку.

Як слід було очікувати, у порівняні зі сплайнами $S_{r,0}\left(p,t\right)$, $r = 2,3,4,5$ сплайн $S_{6,0}\left(p,t\right)$ має більш виражені властивості згладжування; підтверджено справедливість нерівності (4) для випадку, коли $r = 6$.

Подальші дослідження можуть полягати в отриманні часткових випадків сплайна $S_{6,0}\left(p,t\right)$ задля реалізації їх у задачах обробки цифрових сигналів та узагальнення теоретичних результатів досліджень на дво- та багатовимірний випадок.

Бібліографічні посилання

1. **Приставка П.О.** Лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів / П.О. Приставка // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. пр. – Д.: Вид-во ДНУ. – 2011. –Т.15. – С.4–17.
2. **Чуи Ч.** Введение в вэйвлеты: пер. с. англ. / Ч. Чуи – М.: Мир, 2001. – 412 с.
3. **Unser M.**. Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing, IEEE Signal Processing Magazine / M/Unser5 // – 1999. – Vol. 16, No. 6. – P. 22–38.
4. **Приставка П.О.** Дослідження *B*-сплайну п'ятого порядку та їх лінійної комбінації / П.О.Приставка, О.Г.Чолишкіна // Математичне моделювання. 2007 – Дніпродзержинськ, ДДТУ. – №1(16). – С.14–17.
5. **Лигун А.А.** Асимптотические методы восстановления кривых. / А.А.Лигун, А.А.Шумейко. – К.: ІМ НАН України, 1996. – 358 с.
6. **Лигун А.А.** О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ А.А.Лигун, В.В.Кармазина. – Днепродзержинск , Днепродзерж. индустр. ин-т., 1989. – 30 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89г., N1559- Ук89.
7. **Лигун А.А.**Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов // А.А.Лигун, В.В.Кармазина / Днепродзерж. индустр. ин-т. – Днепродзержинск, 1989. – 38 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 13.11.89г., N2569 – Ук89.
8. **Приставка П.О.** Поліномаільні сплайни при обробці даних / П.О.Приставка. – Д.: Вид-во ДНУ, 2004. – 236 с.

Надійшла до редколегії 01.07.2013 р.